# Семинар №5. Вводные задачи по теории графов

1) *Доказать, что не существует неориентированный граф, степени всех вершин которого попарно различны.*

♦Предполагая, что существует n-вершинный неориентированный граф, степени всех вершин которого попарно различны, получим, что эти степени должны быть числами от 0 до n-1 (наибольшая возможная степень вершины в таком графе; петли не допускаются!). Это значит, что в графе есть изолированная вершина нулевой степени и вершина степени n-1, связанная ребрами со всеми остальными, включая изолированную, что невозможно.♦

2) *Найти число всех (отмеченных, не с точностью до изоморфизма!) графов с заданным числом n вершин.*

♦*Неориентированные графы*

Фиксируя число n вершин графа, получим, что конкретный граф определяется множеством ребер, то есть некоторым подмножеством множества всех неупорядоченных пар на n-элементном множестве, число которых есть  . Это значит, что число всех таких графов с n вершинами равно числу всех подмножеств множества из  элементов, то есть  Например, при n=3 это будет 8, а именно: пустой граф (без ребер), три графа с одним ребром ({1, 2}, {1, 3} и {2, 3}), также три графа с двумя ребрами и один полный граф. Заметим, что все графы с одним ребром (а также с двумя) изоморфны, но мы считаем отмеченные графы и различаем их.

*Ориентированные графы*

Рассуждая аналогично предыдущему, легко показать, что число всех отмеченных орграфов с n вершинами равно  Доказать самостоятельно, учитывая, что дуга в орграфе есть *упорядоченная* пара вершин.♦

3) *Доказать, что в связном ациклическом неориентированном графе с n вершинами число ребер равно n-1.*

♦Индукция по n.

Базис (n=1) тривиален (в одновершинном графе 0 ребер).

Предположим, что утверждение верно для всех n, не больших некоторого k.

Рассмотрим граф с числом вершин, равным k+1. Поскольку граф ациклический, то в нем найдется вершина степени 1 (иначе, если предположить, что степень каждой вершины не меньше 2, получим, очевидно, существование циклов). Пусть v – вершина степени 1. Удалим ее из графа вместе с инцидентным ей ребром. После этого получим подграф исходного графа с числом вершин k, который обязан быть ациклическим, так как иначе и исходный граф будет содержать циклы (удаленная вершина, очевидно, не может лежать на цикле). Он также будет связен, так как иначе не был бы связным и исходный граф (удаление вершины v вместе с единственным инцидентным ей ребром не может, очевидно, сказаться на связности возникающего подграфа). По предположению индукции в нем будет k-1 ребер. Возвращая удаленную вершину с инцидентным ей ребром, получим, что число ребер в исходном графе равно k=(k+1)-1, что и требовалось.♦

4) *Доказать, что если в неориентированном графе с n вершинами число ребер*

*строго больше  , то граф связен.*

♦Используем метод математической индукции. Базис (n=3) тривиален (в трехвершинный граф, у которого больше одного ребра связен). Пусть доказываемое верно для всякого графа, число вершин которого не превосходит n-1. Возьмем граф Gn с n вершинами, число ребер которого . Фиксируем в нем произвольно вершину u и рассмотрим подграф

, полученный удалением вершины u со всеми инцидентными ей ребрами. Так как число  есть число ребер в полном (n-1)-вершинном графе, то вершина u имеет степень, не меньшую 1, так как иначе в подграфе Gn-1 число ребер превысит число ребер полного (n-1)-вершинного графа. Заметим, что если dg(u) = n-1, то граф Gn будет связен: любые две вершины будут соединены цепью, проходящей через вершину u. Таким образом, для доказательства связности графа Gn при 1≤ dg(u) < n-1 достаточно доказать, что связен подграф Gn-1. Тогда и выделенная вершина u будет соединена цепью с любой вершиной графа.

Рассмотрим тогда случай наименьшего числа ребер в подграфе Gn-1. Он возникнет при условии dg(u) = n-2, причем тогда число ребер в подграфе составит |En-1| = |En| - (n-2). Так как , то

. Итак, наименьшее возможное число ребер в подграфе Gn-1 при dg(u) < n-1 составит число, большее . Отсюда, по предположению индукции, подграф Gn-1 связен, что и требовалось.

*Второе решение*. Предположим, что граф с числом ребер, большим , не связен. Тогда в нем есть по крайней мере две компоненты. Пусть компонента  содержит вершин, а компонента  -  вершин. При этом можно считать, что , так как при  и при выполнении условия задачи по крайней мере одно ребро окажется инцидентным единственной вершине компоненты , так как число - число ребер в полном -вершинном графе. Но это противоречие, так как указанная вершина – изолированная по предположению. Таким образом, граф связен.

Итак, . Тогда, полагая числа ребер в каждой компоненте максимальными, получим:



Преобразуем числитель второй дроби:



Тогда



Так как , то второе слагаемое отрицательно, и максимальное число ребер во всем графе меньше .♦

5) *Доказать, что если минимальная степень вершины неориентированного графа с n вершинами не меньше (n-1)/2, то граф связен.*

♦Предположим противное: тогда граф распадается как минимум на две компоненты связности. Пусть в одной компоненте k вершин (а в другой n-k). Тогда для первой компоненты степень любой вершины заключена между (n-1)/2 и k-1, а для второй – между (n-1)/2 и n-k-1, то есть должны выполняться одновременно неравенства:  и . Из первого неравенства , а из второго . Очевидное противоречие.

♦

6) *Доказать, что орграф связен тогда и только тогда, когда в нем есть путь, проходящий через все вершины.*

♦Докажем необходимость условия теоремы. Зададим некоторую нумерацию на множестве вершин связного орграфа. Пусть V = {v1, v2,…, vn}. Очевидно, всегда найдется путь, содержащий вершину v1. Предположим, что построен путь W = vi1 → vi2 →…→ vim, проходящий через какие-то k вершин u1,…, uk для некоторого k < n (эти k вершин не обязаны иметь номера с 1 до k, причем вершины в пути могут повторяться, то есть k не обязательно равно m). Берем вершину uk+1. Если uk+1 ⇒\* vi1 или vim, ⇒\* uk+1, то путь, проходящий через все вершины u1,…, uk , uk+1 построен. Иначе берем наибольший номер s такой, что vis ⇒\* uk+1 (такой номер существует, так как иначе ни из одной вершины пути W не достижима вершина uk+1, но тогда, в силу связности орграфа, любая вершина пути W, в том числе его первая вершина vi1, достижима из uk+1, но как раз это по предположению не имеет места). Так как по предположению s < m, то из вершин vi, s+1,…, vim вершина uk+1 не достижима. Но тогда из нее достижима любая из указанных вершин и, в частности, выполняется:

vi1 → vi2 →…→ vis ⇒\* uk+1 ⇒\* vi, s+1→… →vim, и требуемый путь, проходящий через все вершины u1,…, uk , uk+1 построен.

Достаточность условия доказывается легко. Действительно, если u и v - две произвольные вершины орграфа, то они лежат на пути, проходящем через все вершины. Тогда или из u достижима v, или наоборот.♦

**Задачи для самостоятельного решения**: 5.2, 5.9, 5.10, 5.11, 5.17 (задачи к гл. 5 учебника «Дискретная математика» Белоусова и Ткачева).

*Дополнительная задача* (более трудная). 1) Доказать, что в n-вершинном (n ≥ 3) сильно связном орграфе без петель число дуг (обозначенное через m) удовлетворяет неравенству: n ≤ m ≤ n(n-1).

2) Доказать, что в n-вершинном (n ≥ 2) слабо связном орграфе без петель, но не являющимся сильно связным, число дуг (обозначенное через m) удовлетворяет неравенству: n – 1 ≤ m ≤ (n-1)2.